$h'(\frac{\pi}{4}) \le h'(x) \le h'(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow -2 \le h'(x) \le -1$

$$\begin{cases} h \text{ est dérivable sur } [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \\ \forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], -2 \le h'(x) \le -1 \end{cases}$$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis on a :

$\forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $-2(x - \frac{\pi}{4}) \le h(x) - h(\frac{\pi}{4}) \le -1.(x - \frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2x \le \cot g x - 1 \le \frac{\pi}{4} - x$

Solution 8 :

1°/• $f(x) - 1 = \sqrt{x^2+8} - x - 1 = \sqrt{x^2+8} - (x+1) = \frac{x^2+8-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+8}+x+1}$

$= \frac{7-2x}{\sqrt{x^2+8}+x+1}$

or $\forall x \in [1,2]$ on a : $2 \le 2x \le 4 \Leftrightarrow -4 \le -2x \le -2 \Leftrightarrow 3 \le 7 - 2x \le 5$

et comme $\forall x \in [1,2]$, $\sqrt{x^2+8}+x+1 > 0$ d'où $f(x) - 1 \ge 0$

et par suite $f(x) \ge 1$.

- $f(x) - 2 = \sqrt{x^2+8} - (x+2) = \frac{x^2+8-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+8}+x+2} = \frac{4-4x}{\sqrt{x^2+8}+x+2}$

  or $1 \le x \le 2 \Rightarrow 4 \le 4x \le 8 \Rightarrow 4 - 4x \le 0$ d'où $f(x) - 2 \le 0$.

  Conclusion : $\forall x \in [1,2]$, $1 \le f(x) \le 2$.

- $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+8}}$

  $\Rightarrow |f'(x)| = \frac{|f(x)|}{\sqrt{x^2+8}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+8}}$ car $f(x) > 0$

or $1 \le f(x) \le 2$ et comme $1 \le x \le 2 \Rightarrow 1 \le x^2 \le 4 \Rightarrow 9 \le x^2 + 8 \le 12$

$3 \le \sqrt{x^2+8} \le 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}} \le \frac{1}{\sqrt{x^2+8}} \le \frac{1}{3}$